Varianta 027

Subiectul I

a) Ipotenuza este 10

b) AC=$\sqrt{2}$

c) $\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) Se obține soluția $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$

e) Aria cerută este $\frac{1}{2}$

f) $\frac{2+i}{i-2}=-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}i$; deci a=$-\frac{3}{5}$, b=$-\frac{2}{5}$

Subiectul II

1. a) Suma este -4

b) $\frac{C_5^2}{C_5^3}=\frac{C_5^2}{C_5^2}=1$

c) Rezultă $x+1=x^2+x$ cu $x=\pm 1$ şi convine numai $x=1$

d) $10^x=100 \Leftrightarrow 10^x=10^2 \Leftrightarrow x=2$

e) Probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$

2. a) $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

b) $\int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = \ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \ln 2$

c) $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ si cum $f'(x)<0,(\forall)x<0$ si $f'(x)>0,(\forall)x>0$ rezultă că f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi strict crescătoare pe $[0,+\infty)$, adică $f(x)\geq f(0),(\forall)x\in\mathbf{R}$

d) Din c) $x=0$ este punct de minim si $f(0)=0$; deci coordonatele sunt (0,0)

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2$

Subiectul III

a) Fie $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \Rightarrow x = a + b\sqrt{2},\ \ y = a' + b'\sqrt{2}$ cu $a, a', b, b' \in \mathbf{Z}$;

am $x + y = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$

b) Evident g crescătoare si $g(x + y) = t(x + y) = tx + ty = g(x) + g(y)$ adică $g \in F$

c) Fie $f \in F \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y), (\forall) x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ si

cum $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ fac $x = y = 0$ si obțin $2f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

d) Inducție după $n \in \mathbf{N}$ (cu observația că dacă $n \in \mathbf{N}$ atunci $n = n + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$)

Pentru $n = 0$ $\quad f(0) = 0 \cdot f(1) = 0$, da – aplicând c)

Presupun $f(n) = n \cdot f(1)$ şi am

$f(n+1) = f(n) + f(1) = n \cdot f(1) + f(1) = (n+1) \cdot f(1)$ si afirmația e demonstrată.

Fie $x = a \in \mathbf{Z}$ si $y = b\sqrt{2}$ cu $b \in \mathbf{Z} \Rightarrow x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$

e) Evident $f(a) = a \cdot f(1)$ pentru $a \in \mathbf{N}$ si cum f impară, dacă $a \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N} \Rightarrow a = -n$ cu $n \in \mathbf{N}^*$ şi am $f(a) = f(-n) = -f(n) = -n \cdot f(1) = a \cdot f(1)$. Deci

$f(a) = a \cdot f(1), (\forall) a \in \mathbf{Z}$. Analog $f(b\sqrt{2}) = b \cdot f(\sqrt{2}), (\forall) b \in \mathbf{Z}$. Atunci

$f(a + b\sqrt{2}) = f(a) + f(b\sqrt{2}) = a \cdot f(1) + b \cdot f(\sqrt{2})$

f) Dacă $f(1) = t \in \mathbf{R}$ si $f \in F$, aplicând d) $f(n) = t \cdot n, (\forall) n \in \mathbf{N}$ şi

cum f crescătoare $\Rightarrow t \geq 0$

g) Fie $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$;

$f(x) = f(a + b\sqrt{2}) = a \cdot f(1) + b \cdot f(\sqrt{2}) = a \cdot f(1), (\forall) x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ si cum f este crescătoare rezultă că $f(1) = 0$ adică $f(x) = 0, (\forall) x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

Subiectul IV

a) $f_1(x) = f_0'(x) = 2e^{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală pentru f_0 către $-\infty$

c) Pentru $n = 0$ $\quad f_0(x) = 2^0 \cdot e^{2x} = e^{2x}$, da.

Presupun $f_n(x) = 2^n \cdot e^{2x}$ şi am $f_{n+1}(x) = f_n'(x) = (2^n \cdot e^{2x})' = 2^{n+1} \cdot e^{2x}$.

Deci $f_n(x) = 2^n \cdot e^{2x}, (\forall) x \in \mathbf{R}$ si $(\forall) n \in \mathbf{N}$

d) $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(0) = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)}{f_{n+1}(x)} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^n - 2}{2^n} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_0^x f_n(t)dt}{f_n(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_0^x f_{n+1}'(t)dt}{f_n(x)} = 2 - \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{e^{2x}} = 2$

g) $f_0(x) + f_1(x) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow x = 0$.